

# Bayesin teoreema kvanttimekaniikassa

Teemu Salmela  
LuK-tutkielma  
Fysiikan tutkinto-ohjelma  
Luonnontieteellinen tiedekunta  
Oulun yliopisto  
Toukokuu 2021

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Tausta</b>	<b>4</b>
2.1	Bayesin teoreema . . . . .	5
2.2	Stern-Gerlachin koe . . . . .	5
2.3	Tarvittava kvanttimekaaninen teoria . . . . .	6
2.4	Tiheysmatriisin teoria . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Tutkimusongelma</b>	<b>8</b>
3.1	Stern-Gerlach-mittaus: klassinen todennäköisyys . . . . .	8
3.2	Stern-Gerlach-mittaus: tiheysmatriisi . . . . .	12
3.3	Kaviteetissa olevan kubitin dispersiivinen mittaus: teoria . . . . .	13
3.4	Kaviteetissa olevan kubitin dispersiivinen mittaus: käytännön koe . . . . .	15
3.5	Kvanttisalaus . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Lopputulokset ja pohdinta</b>	<b>19</b>

## Esipuhe

Tämän opinnäytetyön aiheena on Bayesin teoreeman sovellukset ja niiden hyödyntäminen kvanttimekaniikassa. Aihe on kiinnostava, sillä se yhdistää yleisesti todennäköisyyslaskennassa käytettyä teoriaa helpottaen näin kvanttimekaanisia laskuja, jotka tavalla tai toisella ovat todennäköisyyksien laskemista. Valitsin tämän aiheen, sillä minua on aina kiinnostanut matematiikka ja fysiikka, ja Bayesin teoreema oli annetuista opinnäytetyön aiheista lähinnä mielenkiinnonkohteitani. Tämän opinnäytetyön olen tehnyt suurimmaksi osaksi Oulussa, ja lähteisiin perehtymistä olen suorittanut myös Lahdessa. Opinnäytetyö on rajattu suurimmalta osin opinnäytetyön ohjaajan, Matti Silverin, antamiin oppimateriaaleihin, jotka käsittelevät lähinnä Stern-Gerlach-mittausta.

Opinnäytetyöni tavoite on osoittaa kykyni tuottaa suomenkielistä tieteellistä tekstiä ja perehtyä joko suomen- tai englanninkielisiin fysiikan alan teksteihin. Tavoitteeni on myös osoittaa, miten soveltaa fysiikkaan liittyvää käsitteistöä tutkielmassani. Aion suorittaa tavoitteet hyödyntämällä Oulun yliopiston luonnontieteellisen tiedekunnan tarjoamia kursseja, seminaaria ja esitelmiä. Tutustun myös fysiikan alan erilaisiin viitetietokantoihin ja pyrin osoittamaan, miten viitata eri lähteisiin tutkielmassani.

Tämä opinnäytetyö on suoritettu kolmantena opintovuotena, jonka aikana olen osallistunut eri fysiikan ja matematiikan osa-alueiden kursseihin. Varsinkin kurssit kvanttimekaniikan perusteista ovat olleet hyödyllisiä, sillä opinnäytetyöni perustuu niihin. Olen käynyt myös kurssit, jotka käsittelevät englannin kielen harjoittamista fysiikan parissa, ja tiedonhankintakurssin ensimmäisen oppivuotenani. Uskon, että tämän tutkielman teko harjoittaa minua tuleviin opintoihin ja tieteellisen tekstin kirjoittamiseen. Tämä kyky on tärkeä mahdolliselle tulevalle ammatilleni, tutkijan uralle.

## Tiivistelmä

Bayesin teoreema on matemaattinen tapa laskea todennäköisyyksiä, mikä on erittäin hyödyllistä varsinkin kvanttimekaniikassa, jossa työskennellään paljon todennäköisyyksien parissa. Tämä opinnäytetyö sisältää kvanttimekaanisten ilmiöiden tutkimusta ja perehtymystä Bayesin teoreeman pohjalta. Työhön on valittu kolme eri ilmiötä: Stern-Gerlachin koe, kaviteetissa olevan kubitin dispersiivinen mittaustapa ja kvanttisalaus. Työn lopputuloksista huomataan, että tutkittu teoreema helpottaa matemaattisia laskuja huomattavasti.

## 1 Johdanto

Bayesin teoreemaa käytetään paljon tilasto- ja todennäköisyyslaskennassa, mutta sillä on myös sovelluksia monilla muilla aloilla. Bayesin teoreemalla voidaan laskea esimerkiksi jonkin tietyn sairauden saamisen todennäköisyyttä, kun taudilla on tietty esiintymistodennäköisyys ja testillä virheiden todennäköisyydet. Toinen, nykyään paljon tutkittu alue, on koneoppi-minen: esimerkiksi sähköposteja pystytään Bayesin teoreeman avulla seulomaan roskapostiviestien varalta.

Vaikka Bayesin teoreemaa voidaan käyttää monilla eri matematiikan ja fysiikan aloilla, seuraavissa kappaleissa tutustutaan muutamaaan eri kvanttimekaaniseen sovellukseen. Ensimmäiseksi käsitellään Stern-Gerlach-mittausta kahdella eri lähestymistavalla. Toisena tutustutaan kaviteetissa olevaan kubittiin, ja huomaamme yhteneväisyyksiä tämän ja Stern-Gerlach-mittauksen kanssa. Lopuksi käymme läpi vielä kvanttisalauksen perusteita.

Koska tutkielman aihe on teoreettisen fysiikan alalta, on teorian läpikäyminen tutkielmassani erittäin tärkeää. Tässä työssä esitän teoriaa Bayesin teoreemasta, kvanttimekaniikan perusteista ja tiheysmatriiseista. Tärkeimpänä lähteenäni toimii Steven Girvinin kirjoittama oppimateriaali [1], johon useat kappaleet tekstistäni pohjautuvat.

## 2 Tausta

Bayesin teoreema on ehdolliseen todennäköisyyteen liittyvä laki. Se on saanut nimensä 1700-luvulla eläneeltä brittiläiseltä matemaatikolta, filosofilta ja papilta Thomas Bayesilta. Hänen tutkimusongelmansa oli, miten saada selville tulevaisuudessa tapahtuvan tapahtuman todennäköisyys sen perusteella, jos on tiedossa, kuinka monta kertaa tapahtuma on esiintynyt tai ollut esiintymättä menneisyydessä.

Bayes käytti erästä ajatusleikkiä havainnollistamaan ongelmaansa [2]. Henkilö on selin pöytää kohti ja pyytää toista henkilöä pudottamaan pallon pöydälle. Todennäköisyys jokaiselle pöydän kohdalle, johon pallo voi pudota, on yhtä suuri. Henkilön, joka on selin

pöytää kohti, on arvattava, mihin pallo putosi. Tämän jälkeen pöydälle pudotetaan toinen pallo, ja selin olevalle kerrotaan, putosiko pallo oikealle/vasemmalle ensimmäiseen palloon nähden. Jos pallo putoaa vasemmalle ensimmäisestä pallosta, on ensimmäinen pallo todennäköisemmin pöydän oikealla puoliskolla. Jos pudotetaan vielä kolmaskin pallo ja se osuu vasemmalle ensimmäiseen palloon nähden, niin sitten on entistä todennäköisempää, että ensimmäinen pallo on oikealla. Tämä voidaan toistaa  $N$  kertaa, jolloin todennäköisyydet päivittyvät entisestään. Tästä saadaankin Bayesin teoreeman peruste, jota voidaan tulkita kuvaamaan todennäköisyyksien päivittymistä uuden datan avulla jälkikäteen.

## 2.1 Bayesin teoreema

Matemaattisen muodon Bayesin teoreemalle loi ranskalainen matemaatikko Pierre Simon Laplace. Se on seuraavanlainen:

$$P(x|y) = P(y|x) \frac{P_X(x)}{P_Y(y)}. \quad (1)$$

$P_X(x)$  on tapahtuman  $x$  priori-todennäköisyys eli todennäköisyys ilman lisädataa.  $P(y|x)$  on tapahtuman  $y$  uskottavuus eli tapahtuman  $y$  todennäköisyys ehdolla  $x$ .  $P_Y(y)$  on reumatodennäköisyys, mikä kuvaa uuden datan  $y$  todennäköisyyttä ilman alkutilannetta  $x$ .  $P(x|y)$  on  $x$ :n todennäköisyys ehdolla  $y$ , mitä kutsutaan posterioritodennäköisyydeksi [3]. On tärkeää myös korostaa, että  $y$ :n uskottavuus esittää uutta dataa tai uuden datan ilmaantumistodennäköisyyttä ehdolla  $x$ .

## 2.2 Stern-Gerlachin koe

Tämä teoriaosa pohjautuu Wikipedian ja Encyclopedia Britannican artikkeleihin [4] [5]. Stern-Gerlachin koe on saksalaisamerikkalaisen fyysikon Otto Sternin vuonna 1921 suunnittelema koe, jolla pyrittiin todistamaan, että pyörimismäärä on kvantittunut. Koe suoritettiin ensimmäisen kerran Sternin ja saksalaisfyysikko Walther Gerlachin toimesta vuonna 1922. Kokeen suorittamisen aikoihin hallitseva malli atomin kuvailemiseen oli Bohrin atomimalli. Kokeella pyrittiin testaamaan Bohr-Sommerfield-hypoteesia, jonka mukaan hopea-atomin pyörimismäärän suunta on kvantittunut.

Alkuperäisessä kokeessa hopea-atomeja suihkutettiin magneettikentän läpi. Tämä magneettikenttä sai hopea-atomit poikkeamaan alkuperäisestä suunnasta ennen kuin ne osuvat ilmaisimeen, kuten lasilevyyn. Hiukkaset, joilla on nollasta poikkeava magneettinen momentti, poikkeavat alkuperäisestä kulkusuunnasta magneettikentän gradientin takia.

Kokeen lopputuloksena oli se, että hiukkasilla on jokin sisäinen pyörimisliikemäärä, joka on analogiassa klassisesti pyörivän kappaleen pyörimismäärään, mutta saa vain kvan-

tittuneita arvoja. Tätä ominaisuutta kutsutaan nykyään spin-ominaisuudeksi. Kokeesta on tullut yksi kvanttimittauksen prototyypeistä. Koe havainnollistaa yhden tietyn reaaliarvoisen (ominaisarvon) havaitsemista tuntemattomasta ominaisuudesta. Kokeen merkitystä korostaa myös se, että spinin havaitseminen oli ensimmäinen suora todiste kvantittumisesta kvanttimekaniikassa.

### 2.3 Tarvittava kvanttimekaaninen teoria

Tämä teoriaosuus on Steven Girvinin kirjoittamasta oppimateriaalista [1]. Hiukkasen aaltoyhtälö paikkaoperaattorin ominaisfunktioiden määräämässä kannassa saadaan yhtälöstä

$$\psi(x) = \langle x | \Psi \rangle, \quad (2)$$

jossa  $\langle x |$  on paikan ominaistila paikan ominaisarvolla  $x$ . Todennäköisyys löytää hiukkasen paikasta  $x$ , kun paikka mitataan, saadaan Bornin lain avulla eli

$$P(x) = \langle \Psi | x \rangle \langle x | \Psi \rangle = |\psi(x)|^2. \quad (3)$$

Mittauksen jälkeen hiukkasen tila romahtaa, jota kutsutaan aaltofunktion romahtamiseksi. Vastaavasti todennäköisyys liikemäärälle  $k$ , kun liikemäärä mitataan, on

$$\tilde{P}(k) = \langle \Psi | k \rangle \langle k | \Psi \rangle = |\psi[k]|^2, \quad (4)$$

jossa  $\langle k |$  on liikemäärän ominaistila ominaisarvolla  $\hbar k$ . Liikemäärän aaltofunktio saadaan hiukkasen aaltoyhtälön Fourier-muunnoksella

$$\psi[k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \psi(x). \quad (5)$$

Mittaukset eivät kuitenkaan ole näin yksinkertaisia. Mittaustuloksiin yleensä kohdistuu kokeellisten mittaussmekanismien vaikutus. Oletetaan, että paikan mittaukseen tulee mitauslaitteiston vaikutus  $y$ . Täten aaltoyhtälö on yhdistelmä paikan aaltofunktiota ja mitausmekanismin vaikutusta eli

$$\Psi(x,y) = \psi(x)\phi(y). \quad (6)$$

Yhdistetty todennäköisyysjakauma saadaan yhtälöstä

$$P(x,y) = |\Psi(x,y)|^2, \quad (7)$$

jossa todennäköisyys kummallekin muuttujalle erikseen on

$$P_X(x) = \int dy P(x,y), \quad P_Y(y) = \int dx P(x,y). \quad (8)$$

Tavallisesta todennäköisyysteoriasta saadaan

$$P(x,y) = P(x|y)P_Y(y) \quad (9)$$

ja käänteisesti

$$P(x,y) = P(y|x)P_X(x). \quad (10)$$

Näistä kahdesta yhtälöstä saadaan johdettua Bayesin teoreema eli yhtälö (1).

## 2.4 Tiheysmatriisin teoria

Tämä teoriaosuus pohjautuu Wikipedian artikkeliin [6] ja David J. Griffithsin kirjaan [7]. Tiheysmatriisi on yleisempi tapa kuvata kvanttisysteemin tilaa kuin pelkkä aaltofunktio. Tämä johtuu siitä, että tiheysmatriisi mahdollistaa myös sekoitetut tilat. Tilaa, jota kuvataan pelkällä aaltofunktiolla, kutsutaan puhtaaksi tilaksi. Tiheysmatriisia käytetään avoimissa systeemeissä, jossa ympäristöllä on vaikutusta dynamiikkaan.

Tiheysmatriisi on muotoa

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} w_{ij} |i\rangle \langle j|, \quad (11)$$

missä  $w_{ij}$  on kompleksikerroin ja  $|i\rangle$  tila. Tiheysmatriisi on hermiittinen ja normalisoitua eli

$$w_{ij}^* = w_{ji}, \quad (12)$$

$$\text{Tr}[\hat{\rho}] = \sum_i w_{ii} = 1, \quad (13)$$

jossa  $\text{Tr}$  on matriisin jälki. Matriisin diagonaali-alkiot kuvaavat kantatilojen  $|i\rangle$  todennäköisyyksiä ja ei-diagonaaliset alkiot kantatilojen välisiä koherensseja.

Tiheysmatriisi voidaan kuvata myös muodossa [8]

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |a_k\rangle \langle a_k|, \quad (14)$$

missä  $p_k$  on todennäköisyys sille, että systeemi on kannassa  $|a_k\rangle$  (tässä  $|a_k\rangle$  on ominaiskanta).

Tällöin  $p_k$  voidaan tulkita tämän tilan statistiseksi todennäköisyydeksi. Kannat oletetaan normalisoituviksi, ja ollakseen fysikaalisesti voimassa oleva, on myös todennäköisyyksien oltava normalisoituvia,  $\sum_k p_k = 1$ , ja positiivisia ( $0 \leq p_k \leq 1$ ).

Tapaus, jossa vain yksi tila on mahdollinen, on siis puhdas tila, jolloin tiheysoperaattori sievenee muotoon

$$\hat{\rho} = |a\rangle\langle a|. \quad (15)$$

Tapausta, jossa on useita tiloja, kutsutaan sekoittuneeksi tilaksi, jossa tiheysoperaattori on sama kuin yhtälössä (14). Puhtaille tiloille pätee  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ , sekoitetuille tiloille  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$  ja kaikissa tapauksissa  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ .

## 3 Tutkimusongelma

### 3.1 Stern-Gerlach-mittaus: klassinen todennäköisyys

Kvanttimekaniikassa eräs Bayesin teoreeman sovellus on spinin mittaus Stern-Gerlachin magneetilla. Siinä pääideana on se, että spiniä ei suoraan mitata, vaan magneettia käytetään lomittamaan spin hiukkasen paikan tai liikemäärän kanssa ja sitten mitataan hiukkasen liikemäärä/paikka, ja siitä päätellään hiukkasen spin. Mittausjärjestely on hahmoteltu kuvassa 1.

Tämä ja sitä seuraavat kaksi kappaletta pohjautuvat Girvinin oppimateriaaliin [1]. Oletetaan, että Stern-Gerlachin magneettiin tulee aaltofunktio, joka on spinien ja tilafunktioiden avulla muotoa

$$\psi_0(x) = [a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle]\Phi(x) \quad (16)$$

missä  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  ja  $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ . Oletetaan myös, että avaruudellinen aaltopaketti  $\Phi$  muodostuu tasoaalloista, joilla kaikilla on niin pieni energia, että pakettia voidaan pitää stationaarisena. Tällöin  $t = 0$  läheisyydessä voidaan kirjoittaa

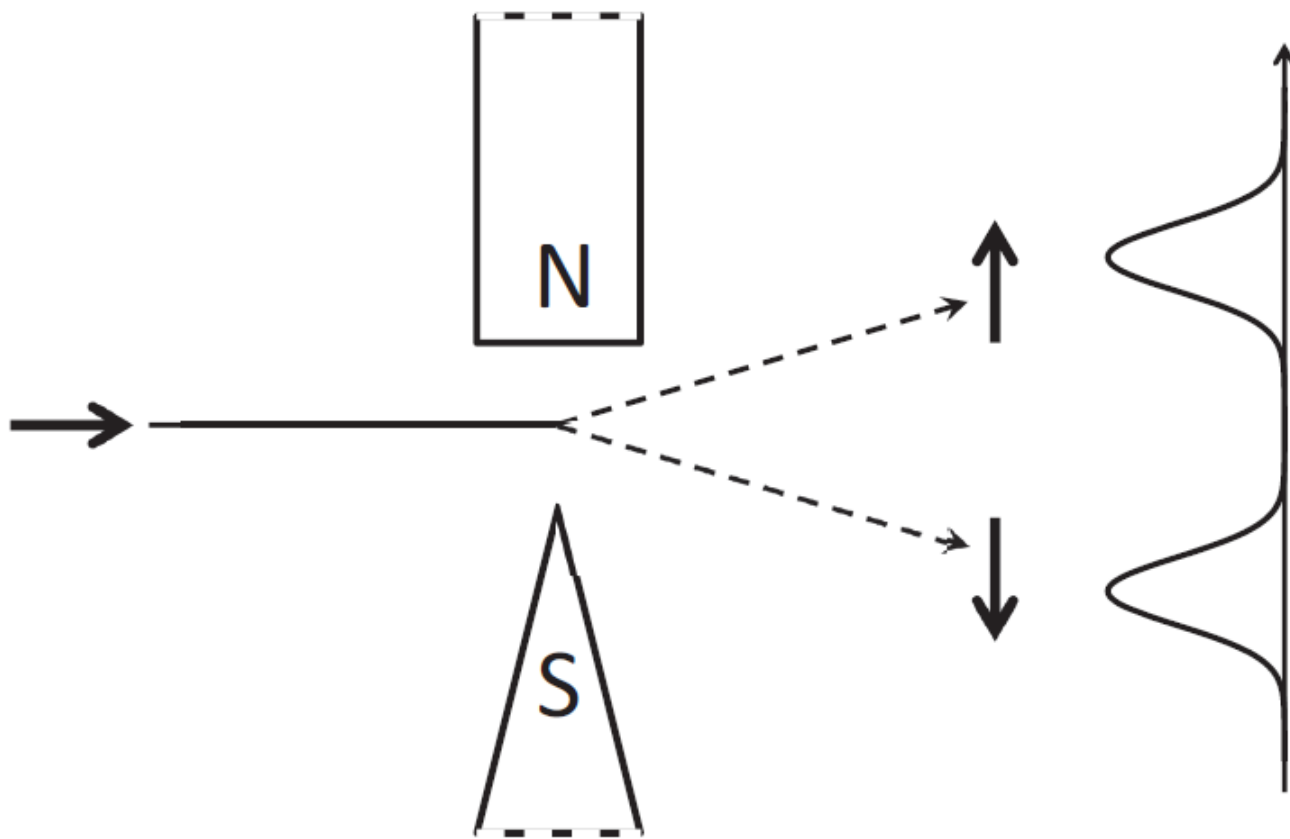
$$\psi(x,t) \approx e^{ik_0x\sigma^z\theta(t)}\psi_0(x), \quad (17)$$

jossa  $\theta(t)$  on Heavisiden funktio,  $\hat{\sigma}^z$  kytkentätermi ja  $k_0$  magneetin aiheuttama impulssi. Kun  $t \geq 0$ , niin saadaan

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle|\Phi_\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle|\Phi_\downarrow\rangle, \quad (18)$$

$$\psi(x) \approx a|\uparrow\rangle e^{ik_0x}\Phi(x) + b|\downarrow\rangle e^{-ik_0x}\Phi(x). \quad (19)$$





Kuva 1: Stern-Gerlach mittausjärjestely, jossa atomisuihku saapuu vasemmalta magneettien väliin. Käyrät oikealla kuvaavat paikan/liikemäärän jakautumista kummallekin spinille. Koska käyrät ovat niin paljon erillään toisistaan, kyseessä on vahva mittaus. Lähde: [1]

Vastaavasti liikemäärän aaltofunktiolle saadaan

$$\psi[k] = a|\uparrow\rangle\Phi[k - k_0] + b|\downarrow\rangle\Phi[k + k_0] \quad (20)$$

Nyt kyseessä ei ole enää separoituva aaltofunktio, sillä mittaus on lomittunut spinin paikan ja liikemäärän kanssa. Kuvitellaan, että on olemassa tapa mitata liikemäärä suoraan ja välittömästi. Tämä mittaus lomittumisen takia kertoo jotain myös hiukkasen spinistä.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että avaruudellinen aaltopaketti on gaussinen

$$\Phi(x) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_0^2}}, \quad (21)$$

jossa  $\sigma_0$  kuvaa magneetin aiheuttamaa kytkentätermin voimakkuutta. Fourier-muunnoksella

saadaan yhtälö liikemäärälle

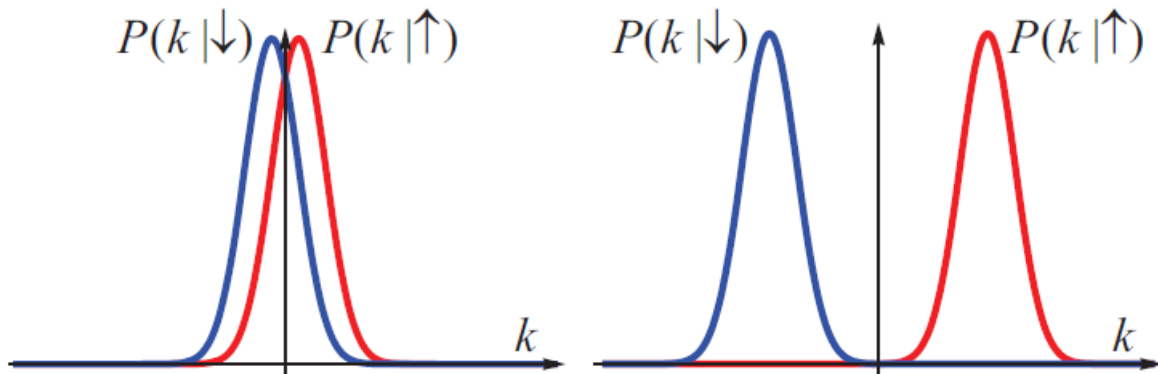
$$\Phi[k] = \left(\frac{2\sigma_0^2}{\pi}\right)^{+1/4} e^{-k^2\sigma_0^2} \quad (22)$$

Kun aikaa kuluu ( $t \geq 0$ ), niin todennäköisyys liikemäärälle sillä ehdolla, että hiukkasen spin on ylös-/alaspäin, on

$$P(k | \uparrow) = |\Phi_0[k - k_0]|^2, \quad (23)$$

$$P(k | \downarrow) = |\Phi_0[k + k_0]|^2. \quad (24)$$

Jos  $k_0\sigma_0 \gg 1$ , ei tuloksesta ole epäilystäkään: jos liikemäärä on positiivinen, on hiukkasen spin ehdottomasti ylös, ja jos liikemäärä on negatiivinen, on hiukkasen spin taas alas. Tämä johtaa ns. vahvaan mittaukseen, jossa liikemäärän todennäköisyysjakaumat (sillä ehdolla, että spin on ylös/alas) ovat selkeitä. Jos  $k_0\sigma_0 \ll 1$ , on kyseessä heikko mittaus, jolloin liikemäärän todennäköisyysjakaumat todennäköisesti leikkaavat toisiaan, eikä spiniä pysty niin helposti määrittämään vähäisen datan takia. Vahvaa ja heikkoa mittausta kuvaavat käyrät on esitettyä kuvassa 2.



Kuva 2: Ehdolliset todennäköisyydet mitatun liikemäärän  $k$  funktion heikon (vasemmalla) ja vahvan (oikealla) tapauksessa. Kun vertaillaan kuvaajia keskenään, huomataan, että heikossa mittauksessa spinin todennäköisyydestä on vaikea saada informaatiota. Lähde:[1]

Jos liikemäärä  $k$  mitataan ja sen todennäköisyys tunnetaan, ja halutaan tietää, onko spin ylös/alas, tarvitaan Bayesin teoreemaa. Yhtälöistä (23) ja (24) saadaan liikemäärän todennäköisyys spinin ehdolla ja oletetaan, että  $P(\uparrow) = |a|^2$  ja  $P(\downarrow) = |b|^2$ . Tällöin Bayesin teoreemalla saadaan todennäköisyys sille, että spin on ylös (alas), sillä ehdolla, että

liikemäärä tunnetaan:

$$P(\uparrow | k) = P(k | \uparrow) \frac{P(\uparrow)}{P(k)} = \frac{1}{P(k)} |a|^2 |\Phi_0[k - k_0]|^2, \quad (25)$$

$$P(\downarrow | k) = P(k | \downarrow) \frac{P(\downarrow)}{P(k)} = \frac{1}{P(k)} |b|^2 |\Phi_0[k + k_0]|^2. \quad (26)$$

Gaussisen aaltopakettien tapauksessa tämä yksinkertaistuu muotoon

$$P(\uparrow | k) = \frac{|a|^2}{Z} e^{+\lambda k}, \quad (27)$$

$$P(\downarrow | k) = \frac{|b|^2}{Z} e^{-\lambda k}, \quad (28)$$

jossa  $\lambda \equiv 4k_0\sigma_0^2$  ja

$$Z = |a|^2 e^{\lambda k} + |b|^2 e^{-\lambda k}. \quad (29)$$

Havainnollistetaan, miten Bayesin teoreemaa voidaan käyttää Stern-Gerlach-mittauksen tapauksessa, numeerisella esimerkillä. Olkoon nyt  $a = \frac{4}{5}$  ja  $b = \frac{3i}{5}$ . Täten tilafunktioiden itseisarvojen neliöiksi saadaan  $|a|^2 = \frac{16}{25}$  ja  $|b|^2 = \frac{9}{25}$ . Tämä toteuttaa yhtälössä (16) olevan ehdon, että tilojen  $a$  ja  $b$  itseisarvojen neliöiden summa on 1.

Sijoitetaan  $Z$  yhtälöihin (27) ja (28). Olkoon  $\lambda k = 0,005$ , jolloin kyseessä on heikko mitta. Sijoituksen jälkeen yhtälöt sieventyvät muotoon

$$\begin{aligned} P(\uparrow | k) &= \frac{|a|^2 e^{2\lambda k}}{|a|^2 e^{2\lambda k} + |b|^2} = \frac{\frac{16}{25} \cdot e^{2 \cdot 0,005}}{\frac{16}{25} \cdot e^{2 \cdot 0,005} + \frac{9}{25}} \\ &= 0,642301 \approx 0,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\downarrow | k) &= \frac{|b|^2}{e^{2\lambda k} |a|^2 + |b|^2} = \frac{\frac{9}{25}}{e^{2 \cdot 0,005} \cdot \frac{16}{25} + \frac{9}{25}} \\ &= 0,357699 \approx 0,36 \end{aligned}$$

Nyt huomataan, että todennäköisyydet ovat melko lähellä toisiaan, mutta suurentamalla  $\lambda k$ :n arvoa saadaan suurempi todennäköisyys, että spin on ylös, kun liikemäärä tunnetaan. Toisaalta, jos  $\lambda k$ :n arvo on negatiivinen, saadaan pienentämällä tätä arvoa suurempi todennäköisyys, että spin on alas.

### 3.2 Stern-Gerlach-mittaus: tiheysmatriisi

Edellä käytiin läpi Stern-Gerlach-mittauksista klassisen todennäköisyyslaskennan avulla. Tämä voidaan esittää myös tiheysmatriisin avulla, mikä mahdollistaa useampien eri kvanttimekaanisten tilojen yhdistelmät. Kvanttimekaanisen tilan täysi tiheysmatriisi on

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\Phi_{\uparrow}\rangle a a^* \langle \Phi_{\uparrow}| & |\Phi_{\uparrow}\rangle a b^* \langle \Phi_{\downarrow}| \\ |\Phi_{\downarrow}\rangle b a^* \langle \Phi_{\uparrow}| & |\Phi_{\downarrow}\rangle b b^* \langle \Phi_{\downarrow}| \end{pmatrix} \quad (30)$$

Jos liikemäärän  $k$  arvo mitataan, saadaan spinille tiheysmatriisi

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{P(k)} \langle k | \hat{\rho} | k \rangle = \frac{1}{P(k)} \begin{pmatrix} \langle k | \Phi_{\uparrow} \rangle a a^* \langle \Phi_{\uparrow} | k \rangle & \langle k | \Phi_{\uparrow} \rangle a b^* \langle \Phi_{\downarrow} | k \rangle \\ \langle k | \Phi_{\downarrow} \rangle b a^* \langle \Phi_{\uparrow} | k \rangle & \langle k | \Phi_{\downarrow} \rangle b b^* \langle \Phi_{\downarrow} | k \rangle \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} |a|^2 e^{+\lambda k} & a b^* \\ a^* b & |b|^2 e^{-\lambda k} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

jossa normalisaatiotermi on

$$P(k) \equiv \text{Tr} \langle k | \hat{\rho} | k \rangle = |a \Phi_0[k - k_0]|^2 + |b \Phi_0[k + k_0]|^2. \quad (33)$$

Yhtälöllä (32) on yksinkertainen tulkinta. Oletetaan aluksi, että  $k = 0$ . Tällöin hiukkasen spinille ei mittauksessa tapahdu mitään. Oletetaan seuraavaksi, että  $k > 0$ . Tällöin hiukkasen spin on sitä todennäköisemmin ylöspäin mitä suurempi liikemäärä  $k$  on ja alas-spinin todennäköisyys pienenee. Jos taas  $k < 0$ , on hiukkasen spin vastaavasti todennäköisemmin alaspäin ja ylös-spinin todennäköisyys pienenee.

Edellä laskettiin tiheysmatriisi liikemäärän avulla. Sama voidaan tehdä myös paikan  $x$  mittaukselle heti magneetin ohittamisen jälkeen, jolloin spinin tiheysmatriisiksi saadaan

$$\hat{\rho}_x = \frac{1}{P_X(x)} \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \frac{1}{P_X(x)} \begin{pmatrix} \langle x | \Phi_{\uparrow} \rangle a a^* \langle \Phi_{\uparrow} | x \rangle & \langle x | \Phi_{\uparrow} \rangle a b^* \langle \Phi_{\downarrow} | x \rangle \\ \langle x | \Phi_{\downarrow} \rangle b a^* \langle \Phi_{\uparrow} | x \rangle & \langle x | \Phi_{\downarrow} \rangle b b^* \langle \Phi_{\downarrow} | x \rangle \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 & e^{-i\varphi} a b^* \\ e^{+i\varphi} a^* b & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

jossa normalisaatiotermi on

$$P_X(x) = \text{Tr} \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = |\Phi_0(x)|^2. \quad (36)$$

Käydään seuraavaksi numeerinen esimerkki tiheysmatriisien parissa. Käytetään tässä esimerkissä samoja  $a$ :n ja  $b$ :n arvoja ( $a = \frac{4}{5}, b = \frac{3i}{5}$ ). Tällöin spinin tiheysmatriisiksi, kun

liikemäärä  $k$  mitataan ja  $\lambda k = 0,005$ , saadaan

$$\hat{\rho}_k = \begin{pmatrix} \frac{|a|^2 e^{2\lambda k}}{|a|^2 e^{2\lambda k} + |b|^2} & \frac{ab^* e^{\lambda k}}{|a|^2 e^{2\lambda k} + |b|^2} \\ \frac{a^* b e^{\lambda k}}{|a|^2 e^{2\lambda k} + |b|^2} & \frac{|b|^2}{e^{2\lambda k} |a|^2 + |b|^2} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,64 & -0,48 \cdot i \\ 0,48 \cdot i & 0,36 \end{pmatrix}.$$

Kyseessä on tiheysmatriisi, sillä tiheysmatriisin kaikissa tapauksissa  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$  ja ei-diagonaaliset alkioit ovat hermitiivisiä. Kyseessä on kuitenkin sekoitettu tila, sillä  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 0,540499 < 1$ . On kuitenkin hyvä huomata, että ei-diagonaaliset alkioit voivat olla myös negatiivisia.

### 3.3 Kaviteetissa olevan kubitin dispersiivinen mittaus: teoria

Nyt kun olemme käsitelleet Stern-Gerlach-mittauksia, voimme siirtyä käsittelemään seuraavaksi kaviteetissa olevan kubitin dispersiivistä mittausta, joka on analogiassa Stern-Gerlachin mittauksen kanssa. Edellä kubitin tila oli lomittunut hiukkasen liikemäärän kanssa, ja käsitelimme mittauslaitteiston vaikutusta mitattuun liikemäärään tai paikkaan. Tässä esimerkissä kaviteetissa heijastuvien mikroaaltojen vaihe on lomittunut kubitin tilojen kanssa, ja nyt tulemme käsittelemään mittauslaitteiston vaikutusta mikroaaltojen vaiheen mittaamiseen.

Jos koherentissa tilassa  $|\alpha\rangle$  oleva mikroaaltopulssi kaviteettitaajuudella  $\omega_c$  lähetetään kohti kaviteettia, on systeemin alkuperäinen tila ennen kuin aalto osuu kaviteettiin yhdistetila

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = [a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle]|\alpha\rangle \quad (37)$$

ja lopullinen tila, missä kubitti ja kaviteetti on lomittunut, on

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = [a|e^{-i\theta_0}\alpha\rangle|\uparrow\rangle + b|e^{+i\theta_0}\alpha\rangle|\downarrow\rangle], \quad (38)$$

jossa  $\theta_0$  kuvaa kompleksista vaihetta.

Siirrytään seuraavaksi tutkimaan dispersiivistä mittausta tiheysmatriisien avulla. Pian tullaan huomaamaan, että Stern-Gerlach-mittaukset ovat selkeästi analogisia kaviteetissa olevan kubitin dispersiiviseen mittaukseen. Jos tutkitaan signaalin kvadratuuria  $\hat{Y}$  ja sen mitattua arvoa  $y$ , joka voidaan tulkita liikemäärän  $k$  vastaavaksi arvoksi, saadaan tiheys-

matriisiksi

$$\hat{\rho}_y = \frac{1}{P(y)} \langle y | \hat{\rho} | y \rangle = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} |a|^2 e^{+\lambda y} & e^{i\varphi} a b^* \\ e^{-i\varphi} a^* b & |b|^2 e^{-\lambda y} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

jossa kerroin  $\lambda = -4\sqrt{N} \sin \theta_0$ ,  $\bar{N}$  on fotonien keskimääräinen arvo, ja

$$P(y) = |a|^2 e^{-\lambda y} + |b|^2 e^{+\lambda y}. \quad (40)$$

$Z$  on melkein sama kuin yhtälössä (29) oleva normalisaatiotekijä, ainoana poikkeuksena liikemäärän korvaaminen arvolla  $y$ . Vastoin kuin Stern-Gerlach-mittauksissa matriisissa on ylimääräinen vaiheen kierto

$$\varphi = -\bar{N} \sin 2\theta_0. \quad (41)$$

Tämä tiheysmatriisi on analoginen Stern-Gerlachin mittauksissa saamamme liikemäärän tiheysmatriisin eli yhtälön (32) kanssa. Mitattaessa kvadratuurin  $\hat{X}$  arvoa  $x$ , mikä voidaan käsittää vastaavan paikan arvoa, saadaan tiheysmatriisiksi

$$\hat{\rho}_x = \begin{pmatrix} |a|^2 & e^{i\lambda(x-\bar{x})} e^{i\varphi} a b^* \\ e^{-i\lambda(x-\bar{x})} e^{-i\varphi} a^* b & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

jossa  $\bar{x} = \sqrt{N} \cos \theta_0$  on  $x$ :n keskiarvo. Tämä tiheysmatriisi on analoginen yhtälön (35) kanssa eli Stern-Gerlach-mittauksen paikan tiheysmatriisin kanssa.

Oletetaan lopuksi, että kvadratuurien  $\hat{X}$  ja  $\hat{Y}$  (jotka saadaan homodyynisestä mittauksesta) sijasta mitataan fotomonistimella fotoninnumero  $\hat{N}$ . Oletetaan myös, että mittauksen jälkeen saadaan mittaustulokseksi arvo  $n$ . Tämän tiheysmatriisiksi saadaan

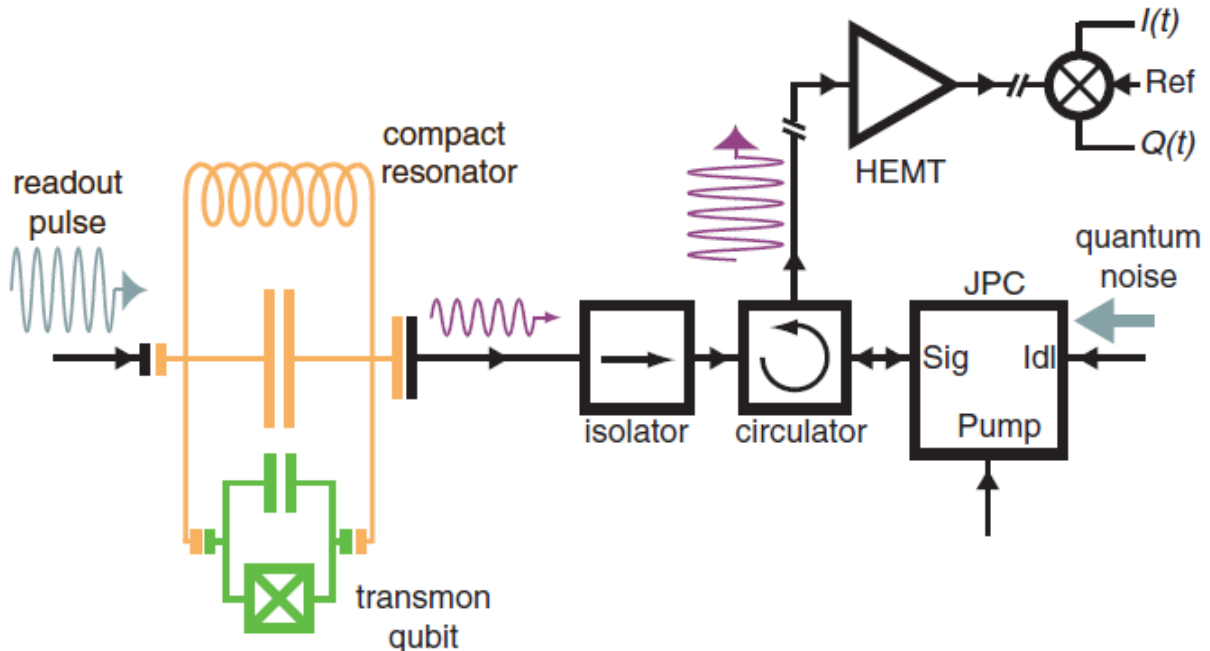
$$\hat{\rho}_n = \begin{pmatrix} |a|^2 & a b^* e^{-i2\theta_0 n} \\ b a^* e^{+i2\theta_0 n} & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Kubitti täten jää puhtaaseen tilaan, mutta kääntyy  $z$ -akselin ympäri kulmalla  $\theta_n = -2\theta_0 n$ . Tämä tarkoittaa, että jokainen foton, joka heijastuu kaviteetista, siirtää kahden kubittitilan superpositiota vakiokulmalla  $-2\theta_0$ . Tämä on yhtälön (35) suora vastine pois lukien se, että  $n$  saa nollasta poikkeavia keskiarvoarvoja, kun taas Stern-Gerlach-mittauksessa pysytään nollan lähetyvillä.

### 3.4 Kaviteetissa olevan kubitin dispersiivinen mittaus: käytännön koe

Edellä käsiteltiin kaviteetissa olevan kubitin dispersiivisen mittauksen teoriaa. Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan tätä suhteessa oikeaan koejärjestelyyn. M. Hatridgen et al. Science-lehdessä julkaistussa artikkelissa [9] käsitellään ideaalisessa mittauslaitteistolla suoritettua mittausta, jossa systeemi jää puhtaaseen tilaan, jonka kehitystä voidaan seurata mittaushistorian avulla. Artikkelissa tätä ominaisuutta mitataan käyttämällä suprajohtavaa kubittia, joka on dispersiivisesti lomittunut kaviteetin kanssa, jossa mikroaalto kulkee. Mittauslaitteiston vaikutusta kubitin tilaan yksittäisessä mittauksessa molemmilla signaalin kvadratuurilla tarkkailtiin ja todettiin, että muodostuu stokastinen operaatio, jonka vaikutus on määritelty mittaustuloksista.

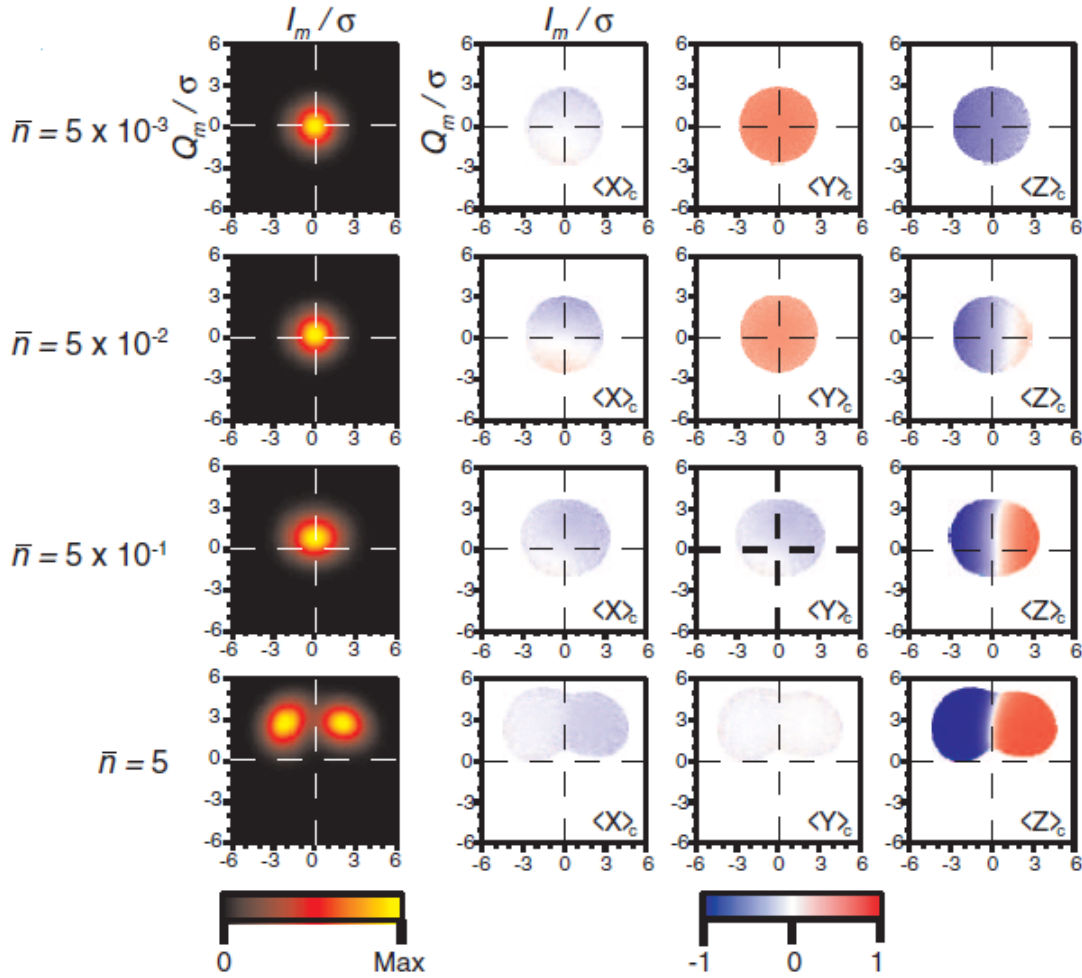
Kuva 3 esittää artikkelissa [9] esitetyn kokeen mittausjärjestelyä. Kokeessa mikroaaltopulssi kulkeutuu ensin resonaattoria ja suprajohtavaa kubittia, joka tässä tapauksessa on transmoni, pitkin. Tämän jälkeen signaali kulkeutuu eristimen läpi kiertoelimen kautta JPC-vahvistimeen (Johnson Parametric Converter). Siellä signaali suurenee makroskooppiseen mittakaavaan, jossa signaalia voidaan prosessoida ja tallentaa. Vahvistimesta signaali kulkeutuu takaisin kiertoelimeen, josta se siirtyy HEMT:in (High-electron-mobility transistor) kautta laitteistoon, jossa voidaan mitata kummatkin kvadratuurit.



Kuva 3: Kuva kappaleessa 3.4 esitetystä mittausjärjestelystä Lähde:[9]

Eri fotonien lukumäärän keskiarvoilla  $\bar{n}$  saaduista tuloksista histogrammimuodossa on

esitetty kuvassa 4. Mittaukset on tallennettu neljällä eri mittaussignaalin keskimääräisen fotonilukumäärän  $\bar{n}$  arvolla:  $5 \times 10^{-3}$ ,  $5 \times 10^{-2}$ ,  $5 \times 10^{-1}$  ja 5. Kuvan vasen sarake kuvaa 2D-histogrammia jokaisella skaalatulla mittaustuloksella mikroaaltopulssin aikana. Kolme oikeanpuoleista saraketta ovat myös 2D-histogrammeja, mutta jokainen sarake kuvaa lopullisia kubitin Blochin vektoreita,  $\langle X \rangle_C$ ,  $\langle Y \rangle_C$  ja  $\langle Z \rangle_C$ . Heikossa mittauksessa kubitin tilojen, perus- ja viritetyn (kuvassa 4 histogrammin vasen ja oikea ympyrä), jakautumat lomittuvat melkein kokonaan. Tämä on analogiassa Stern-Gerlach-mittauksien kanssa. Heikko mittausta on tässä tapauksessa silloin, kun  $\bar{n} \ll 1$ . Kun  $\bar{n}$  kasvaa, tulee mittauksesta enemmän vahvemman mittauksen kaltainen, kuten Stern-Gerlach-mittauksessa. Vahvaa mittausta kuvaa parhaiten kuvan 4 alin rivi, missä  $\bar{n} \gg 1$ .



Kuva 4: Kuva eri mitattujen fotonien lukumäärän keskiarvoilla saaduista mittaustuloksista 2D-histogrammeista. Lähde:[9]



### 3.5 Kvanttisalaus

Seuraava teoriaosuus pohjautuu Quantumxhange-sivuston tekstiin [10] ja Xiongfeng Man julkaisemaan väitöskirjaan [11]. Kryptologia (eng. "cryptography") on prosessi, jossa pyritään salaamaan tai purkamaan tekstiä siten, että vain joku, jolla on oikea "koodiavain", pystyy tulkitsemaan viestiä oikein. Kvanttisalaus ("quantum cryptography") taas on kryptologian jatke, jossa sovelletaan kvanttimekaniikan lainalaisuuksia salaamaan ja lähettämään viestiä niin, että kolmas osapuoli ei pysty tulkitsemaan sitä. Kvanttimekaniikan toimintaperiaatteita kvanttisalauksessa ovat muun muassa:

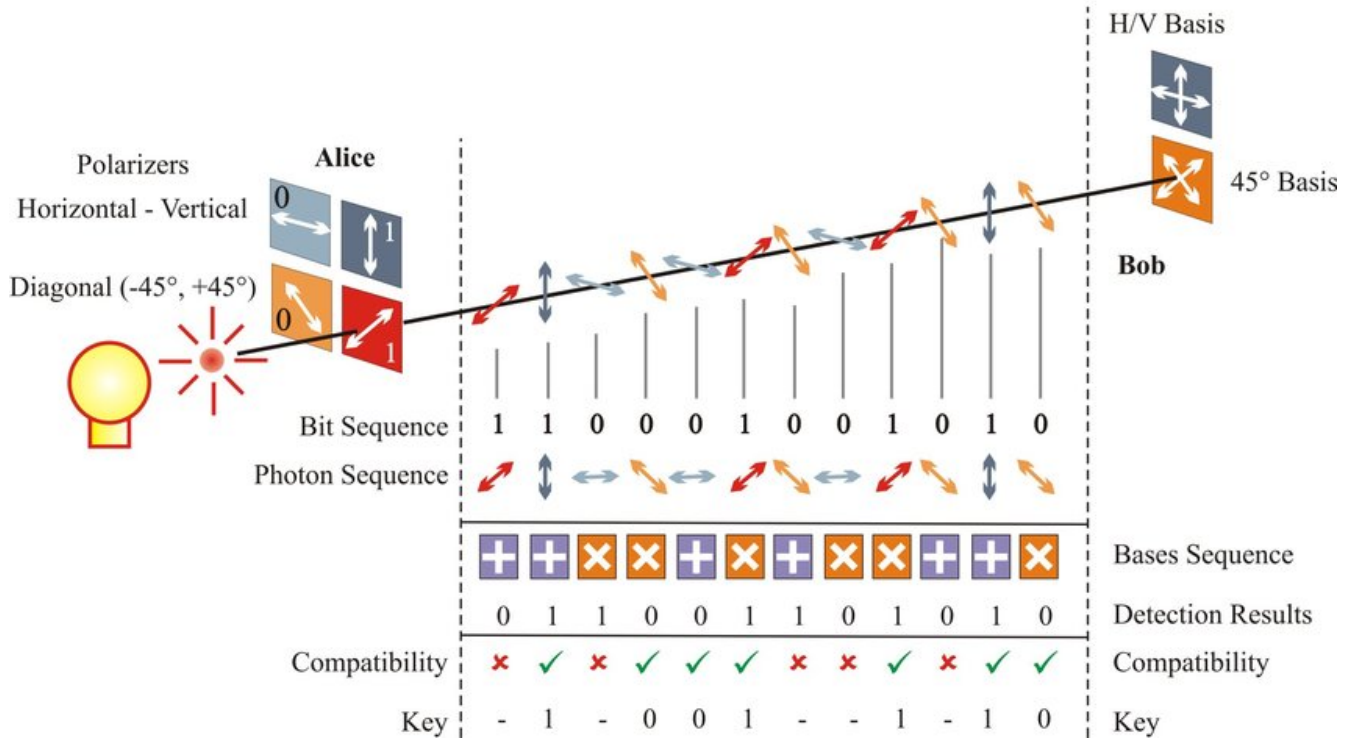
- Hiukkaset, josta maailmankaikkeus koostuu, ovat luonnostaan epämääräisiä ja voivat olla olemassa useammassa kuin yhdessä paikassa taikka tilassa.
- Kvanttiominaisuuksia ei voi mitata muuttamatta tai aiheuttamatta häiriötä mitattavaan aaltofunktioon.
- Fotoneja voi luoda sattumanvaraisesti yhdestä kvanttitilasta.

Kvanttisalauksessa käytetään sarjaa fotoneja lähettämään dataa paikasta A paikkaan B lasikuitukaapelia pitkin. Prosessi voidaan selittää vaiheissa:

1. Lähettäjä lähettää fotoneja filtterin läpi, joka sattumanvaraisesti antaa fotoneille yhden neljästä mahdollisesta polarisaatioista ja bittimerkinnästä: vertikaalinen "V" (yksi bitti), horisontaalinen "H" (nolla bittiä), oikea "R" (yksi bitti) ja vasen "L" (nolla bittiä).
2. Fotonit kulkevat vastaanottajalle, joka käyttää kahta säteenjakajaa, horisontaalista/vertikaalista ja diagonaalista, ja lukee "viestin" fotonien polarisaatiosta. Vastaanottaja ei tiedä, mitä säteenjakajaa kullekin fotonille pitäisi käyttää ja valitsee itse, kumpaa käyttää.
3. Kun fotonisarja on lähetetty kokonaan, vastaanottaja kertoo lähettäjälle, mitä säteenjakajaa on käyttänyt. Tämän jälkeen lähettäjä vertaa kulkeutunutta informaatiota käyttämiinsä filttereihin, jolla "avain" lähetettiin. Fotonit, joissa käytettiin väärää säteenjakajaa, hylätään, ja jäljelle jäävästä sarjasta tulee avain.

Kvanttisalauksessa otetaan myös huomioon se, että jos kolmas osapuoli lukee viestin, fotonin tila muuttuu. Tällöin vertaamalla fotonien alku- ja lähtöpäässä huomataan, jos viestiä on "salakuunneltu". Kvanttisalauksen toimintaa on kuvattu kuvassa 5.

Edellä on käsitelty kvanttisalauksen perusteita kirjallisessa muodossa. Nyt tutkitaan kvanttisalausta matematiikan avulla. Tämä osuus pohjautuu Journal of Modern Optics -lehdessä julkaistuun artikkeliin [13]. Oletetaan, että viestin lähettäjä käyttää joko toista



Kuva 5: Kuva kvanttiläulun toiminnasta. Tästä nähdään, että tieto avaimesta välittyy vain silloin, kun kummankin, lähettäjän (kuvassa "Alice") ja vastaanottajan ("Bob"), mitaukset ovat yhtenevät, ja filteerit ja säteenjakajat ovat toisiaan vastaavat (vasen/oikea → diagonaalinen, horisontaalinen/vertikaalinen → horisontaalinen/vertikaalinen). Lähde:[12]

lineaarisen polarisaation tilasta (vertikaalinen V tai horisontaalinen H) taikka toista ympyräpolarisaatiota (vasen L tai oikea R). Ympyräpolarisaation tilat voidaan ilmoittaa lineaarisen polarisaation tilan superpositiona ja kääntäen:

$$|L\rangle = 2^{-1/2}(|V\rangle + i|H\rangle), \quad (44)$$

$$|R\rangle = 2^{-1/2}(|V\rangle - i|H\rangle), \quad (45)$$

$$|V\rangle = 2^{-1/2}(|L\rangle + |R\rangle), \quad (46)$$

$$|H\rangle = 2^{-1/2}i(|R\rangle - |L\rangle). \quad (47)$$

Oletetaan, että hän valitsee tilat niin, että niiden todennäköisyydet ovat yhtä suuret. Vastaanottaja päättää mitata joko ympyrä- tai lineaarista polarisaatiota. Näiden esiintymistodennäköisyydet ovat yhtä suuret.

Seuraavaksi oletetaan, että viestin lähettäjä on valinnut vasemman ympyräpolarisaation L yhdelle tietylle fotonille. Tällä valinnalla foton asetuu ennustettuun ("predictive") tilaan  $|L\rangle^{\text{pred}}$ . Tämän jälkeen lähettäjä pystyy ennustamaan todennäköisyydet vastaanottajan

mittauksille:

$$\begin{aligned} P(b_L|a_L) &= P(\text{ymp.mitattu}) \times |\langle L|L \rangle^{\text{pred}}|^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \\ P(b_R|a_L) &= P(\text{ymp.mitattu}) \times |\langle R|L \rangle^{\text{pred}}|^2 = \frac{1}{2} \times 0 = 0, \\ P(b_V|a_L) &= P(\text{lin.mitattu}) \times |\langle V|L \rangle^{\text{pred}}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ P(b_H|a_L) &= P(\text{lin.mitattu}) \times |\langle H|L \rangle^{\text{pred}}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Näissä b viittaa viestin vastaanottajaan ja a lähettäjään.

Seuraavaksi oletetaan, että vastaanottaja mittaa vertikaalista polarisaatiota. Tällöin vastaanottaja pystyy ennustamaan todennäköisyydet sen perusteella, miten lähettäjä valmistaui viestin lähettämiseen:

$$\begin{aligned} P(a_L|b_V) &= P(\text{ymp.valmistauduttu}) \times |\langle L|V \rangle^{\text{retr}}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ P(a_R|b_V) &= P(\text{ymp.valmistauduttu}) \times |\langle R|V \rangle^{\text{retr}}|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ P(a_V|b_V) &= P(\text{lin.valmistauduttu}) \times |\langle V|V \rangle^{\text{retr}}|^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \\ P(a_H|b_V) &= P(\text{lin.valmistauduttu}) \times |\langle H|V \rangle^{\text{retr}}|^2 = \frac{1}{2} \times 0 = 0, \end{aligned}$$

jossa  $V\rangle^{\text{retr}}$  on tilavektori, jossa vastaanottajan säteenjakajaksi on valittu vertikaalinen säteenjakaja. Yläindeksi retr kuvaa ennustamista taaksepäin ("retrodictive"). Tässä vastaanottaja ennustaa todennäköisyyttä sille, mitä filteriä alkuperäisen viestin lähettäjä on käyttänyt.

Edellä olleilla yhtälöillä pystytään todentamaan yhdistetty todennäköisyys eli yhtälöt (9) ja (10), kun  $P(a_i) = P(b_j) = \frac{1}{4}$ . Tämän avulla pystytään laskemaan ehdolliset todennäköisyydet joko muokkaamalla yhtälöitä (9) ja (10) tai sijoittamalla todennäköisyyksiä suoraan Bayesin teoreeman yhtälöön (1).

## 4 Lopputulokset ja pohdinta

Yhteenvetona tekstilleni voin todeta, että onnistuin työssäni mielestäni hyvin. Opin paljon englanninkielistä matematiikan ja kvanttimekaniikan käsitteistöä. Pienoinen ongelma tässä työssäni oli se, että en luottanut paljon kykyyni kääntää englannin kieltä suomen kielelle. Sen tekeminen vaati lähdemateriaaleihin perusteellista käsittelyä ja ymmärrystä, mutta onnistuin siinäkin. Sain paljon tukea työni ohjaajalta, joka henkilökohtaisissa tapaamisissa

selitti asioita selväksi niin, että tutkielmani teko olisi helpompaa.

Olen tyytyväinen saamaani lopputulokseen ja koen onnistuneeni tieteellisen tekstin tekemisessä. Tekstini pohjautui suurimmilta osin Girvinin oppimateriaaliin [1], joten on mielestäni ymmärrettävää, että olisin halunnut etsiä enemmän tieteellisiä julkaisuja tekstini pohjalta. Saamani opinnäytetyöni on kuitenkin kirjallisuuteen perustuva ja materiaalin oli oltava kuitenkin melko selkeä, jotta se voitaisiin kääntää selkeälle suomen kielelle. Koen opineeni tuottamaan tieteellistä tekstiä ja ymmärtämään englanninkielistä termistöä, joten voin todeta työni tavoitteeni toteutuneen.

Opinnäytetyöstäni saamista lopputuloksista voidaan todeta, että vaikka kvanttimekaniikka on suurimmalta osin matemaattista ja teknistä, niin Bayesin teoreema yksinkertaistaa mahdollisia matemaattisia laskuja todella paljon. Bayesin teoreeman voidaan siis sanoa olevan todella hyödyllinen kvanttimekaniikassa. Tästä työstä voitaisiin mielestäni jatkaa monipuolisimpiin kvanttimekaniikan sovelluksiin, esimerkiksi kvanttimekaniikan filosofiaan pohjautuva ”Quantum Bayesianism” eli ”Qbism”. Kirjoittamani opinnäytetyö käsittelee suurimaalta osin Stern-Gerlach-mittauksiin ja siihen liittyvää teoriaa, joten sovelluksia olisi voinut jo tässä työssä esitellä monipuolisemmin. Tätä voisi käsitellä enemmän tulevaisuuden mahdollisissa opinnäytetöissäni.

Lopuksi esitän vielä kiitokset opinnäytetyöni ohjaajalle, Matti Silverille, sekä Oulun yliopiston matematiikan ja fysiikan alojen luennoitsijoille, joita on useita. Osoitan myös kiitokset perheelleni ja Oulun kaupungin mielenterveyspalveluille saamastani tuesta kirjoitustyön aikana. Mainitsemani henkilöt ja palvelut tekivät opinnäytetyöni tekemisestä mahdollisen.

## Viitteet

- [1] S. Girvin, *Lecture notes of Les Houches Summer School: Circuit QED: Superconducting qubits coupled to Microwave Photons, Chapter 7*, Yale University, p. 84-102.
- [2] John Paul Mueller, Luca Massaron, *A Brief Guide to Understanding Bayes' Theorem* [verkkoaineisto]. [Viitattu 1.12.2020]  
Saatavissa: <https://www.dummies.com/programming/big-data/data-science/a-brief-guide-to-understanding-bayes-theorem/>.
- [3] Wikipedia, *Bayesin teoreema* [verkkoaineisto]. [Viitattu 1.12.2020] Saatavissa: [https://fi.wikipedia.org/wiki/Bayesin\\_teoreema](https://fi.wikipedia.org/wiki/Bayesin_teoreema).
- [4] Wikipedia, *Stern-Gerlach experiment* [verkkoaineisto]. [Viitattu 20.3.2021] Saatavissa: [https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment).

- 
- [5] Encyclopedia Britannica, *Stern-Gerlach experiment* [verkkoaineisto]. [Viitattu 25.4.2021]  
Saatavissa: <https://www.britannica.com/science/Stern-Gerlach-experiment>.
- [6] Wikipedia, *Tiheysmatriisi* [verkkoaineisto]. [Viitattu 1.12.2020] Saatavissa: <https://fi.wikipedia.org/wiki/Tiheysmatriisi>.
- [7] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd Edition 2018, p. 455-459.
- [8] M. Silveri, E. Thunberg, *Quantum devices*, 2020, University of Oulu, p. 6-7.
- [9] M. Hatridge et al., *Quantum Back-Action of an Individual Variable-Strength Measurement*, Science **339**, 178 (2013).
- [10] Quantumxchange, *Quantum cryptography, Explained* [verkkoaineisto]. [Viitattu 31.1.2021]  
Saatavissa: <https://quantumxc.com/quantum-cryptography-explained/>.
- [11] Xiongfeng Ma, *Quantum cryptography: theory and practice*, arXiv: 0808.1385 (2008).
- [12] V. Mavroeidis, K. Vishi, M. Zych, A. Jøsang, *The Impact of Quantum Computing on Present Cryptography*, International Journal of Advanced Computer Science and Applications **9**, 405 (2018).
- [13] S. M. Barnett, D. T. Pegg, and J. Jeffers, *Bayes' theorem and quantum retrodiction*, J. Mod. Opt. **47**, 1779 (2000).